Μαθημα 4º                                                                                31/10/2017

Στοχαστικές

Παράδειγμα (εξυπηρέτησης) → πρέπει κάπως να βρω το ολοκλ

$$b_n = \frac{\lambda^k \mu}{k!} \int_0^{+\infty} \underbrace{t^k e^{-(\lambda+\mu)t}}_{\text{μοιάζει κάποια γνωστή κατανομή?}} \, dt$$

επειδή ξεκινάει από 0 έως +∞ είναι συνεχής

Μοιάζει με την κατανομή Γάμμα(α,β) με σ.π.π

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha}\, \Gamma(\alpha)}$$

$$b_n = \frac{\lambda^k \mu}{k!} \int_0^{+\infty} t^{k+1-1} e^{-(\lambda+\mu)t} \, dt$$

Έχω $\alpha = k+1$ και $\beta = \dfrac{1}{\lambda+\mu}$

Ισχύει ότι $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha}\, \Gamma(\alpha)} = 1$ και αυτό σημαίνει ότι:

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} \, dx = \beta^{\alpha}\, \Gamma(\alpha)$$

Συνεπώς έχω $\displaystyle b_n = \frac{\lambda^k \mu}{\cancel{k!}} \left(\frac{1}{\lambda+\mu}\right)^{k+1} \cancel{\Gamma(k+1)}^{=k!} = \frac{\mu \lambda^k}{(\lambda+\mu)^{k+1}}$ $\quad \rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$

$$= \frac{\rho^k}{(1+\rho)^{k+1}}$$

Ομογενης μαρκοβιανή αλυσιδα με περισσοτερες απο δυο καταστασεις

1º ερωτημα:

$p_j^{(n)} = P(X_n = j)$. Τη χρονικη στιγμη n να βρισκεται στη καταστασυ j

θυμαμαι

$p^{(n)} = p^{(n+1)} P = \dots = p^{(0)} P^n$

$p^{(n)} = p^{(0)} = \begin{bmatrix} P_{00}^{(0)} & P_{01}^{(0)} \\ P_{10}^{(n)} & P_{11}^{(n)} \end{bmatrix}$

2º ερωτημα:

$P_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i)$

3º ερωτημα:

Οριακες πιθανοτητες

Αποδειξη 1º ερωτημα το συνδεω με το n-1

$p_j^{(n)} = P($η σ.δ βρισκεται στη καταστασυ j τη χρ. στιγμη $n) =$

$= p_0^{(n-1)} P_{0j} + p_1^{(n-1)} P_{1j} + p_2^{(n-1)} P_{2j} + \dots \Rightarrow$ j+1 στηλες επειδη ξεκινω απο 0

$p_j^{(n)} = \underbrace{\begin{pmatrix} p_0^{(n-1)} & p_1^{(n-1)} & p_2^{(n-1)} & \dots \end{pmatrix}}_{\text{διανυσμα γραμμη } 1 \times \text{πληθος καταστ.}} \begin{pmatrix} P_{0j} \\ P_{1j} \\ P_{2j} \\ \vdots \end{pmatrix}$

διανυσμα στηλη

πληθος καταστ. x 1

πιθανοτητων μεταβασυ ενος βηματος.

Γενικος τυπος

$p^{(n)} = \begin{pmatrix} P(X_n=0) & P(X_n=1) & P(X_n=2) & \dots \end{pmatrix} = p^{(n-1)} \cdot P = \dots = p^{(0)} P^n$

Αποδειξη 2º ερωτημα το συνδεω με το 0

$p_j^{(n)} = P($η σ.δ βρισκεται στη καταστασυ j τη χρον. στιγμη $n) =$

$= p_0^{(0)} P_{0j}^{(n)} + p_1^{(0)} P_{1j}^{(n)} + p_2^{(0)} P_{2j}^{(n)} + \dots \Rightarrow$

$p_j^{(n)} = \underbrace{\begin{pmatrix} p_0^{(0)} & p_1^{(0)} & p_2^{(0)} & \dots \end{pmatrix}}_{\text{Ειναι το διανυσμα } p^{(0)}} \begin{pmatrix} P_{0j}^{(n)} \\ P_{1j}^{(n)} \\ P_{2j}^{(n)} \\ \vdots \end{pmatrix}$

Απο πριν εχω οτι: $P^{(n)} = P^{(n-1)} \cdot P = \ldots = P^{(0)} P^n$

Ισοδυναμονται:

$$P^{(n)} = \begin{bmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & p_{02}^{(n)} & \ldots \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} & \ldots \\ p_{20}^{(n)} & p_{21}^{(n)} & p_{22}^{(n)} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Παρατηρηση

Απο τη προηγουμενη αποδειξη προκυπτει οτι ο πινακας $P^n$ εχει στοιχεια τις πιθανοτητες $p_{ij}^{(n)}$

$$P^{n+m} = P^n \cdot P^m \Rightarrow \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)} = p_{ij}^{(n+m)}$$ Εξισωση Chapman - Kolmogorov

Ερμηνεια

$p_{ij}^{(n+m)}$: ειναι η πιθανοτητα να πaw απο το $i$ στο $j$ σε $(n+m)$ βηματα. Αυτη η πιθανοτητα ειναι ιση με το να πaw στο $i$ οποιοδηποτε σε $n$ βηματα και απο εκει να πaw στο $j$ σε $m$ βηματα

Ορισμοι Επικοινωνιας

1) Η κατασταση $j \in S$ ονομαζεται προσιτή απο την $i \in S$ αν $\exists\, n \geq 0$ τετοιο ωστε $p_{ij}^{(n)} > 0$. Δηλαδή υπαρχει "δρομος" για να πaw απο το $i$ στο $j$ σε οποιοδηποτε αριθμο βηματων

2) Οι καταστασεις $i, j \in S$ επικοινωνουν αν $i \to j$, $j \to i$ δηλ. $\exists\, n \geq 0$ $p_{ij}^{(n)} > 0$ και $\exists\, n \geq 0$ $p_{ji}^{(n)} > 0$

Προταση

Μια σχεση επικοινωνιας ειναι σχεση ισοδυναμιας

i) $i \leftrightarrow j$ αναχλαστικη

ii) $i \leftrightarrow j \Rightarrow j \leftrightarrow i$ συμμετρικη

iii) $i \leftrightarrow j$ , $j \leftrightarrow k \Rightarrow i \leftrightarrow k$ μεταβατικη

Αποδειξη

i) $i \leftrightarrow i$ διοτι $p_{ii}^{(0)} = 1$ ($\exists\, n > 0$ τ.ω $p_{ii}^{(n)} > 0$)

ii) $i \leftrightarrow j$ σημαινει οτι $\left.\begin{array}{l} \exists\, n_1 > 0 \quad p_{ij}^{(n_1)} > 0 \\ \exists\, n_2 > 0 \quad p_{ji}^{(n_2)} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow j \leftrightarrow i$

iii) $i \leftrightarrow j \Rightarrow \exists\, n_1 > 0$ τ.ω $p_{ij}^{(n_1)} > 0$

$\exists\, n_2 > 0$ τ.ω $p_{ji}^{(n_2)} > 0$

$j \leftrightarrow k \Rightarrow \exists\, n_3 > 0$ τ.ω $p_{jk}^{(n_3)} > 0$

$\exists\, n_4 > 0$ τ.ω $p_{kj}^{(n_4)} > 0$

Θελω να δειξω οτι $i \to k$ και $k \to i$

Δηλ $p_{ik}^{(n_1+n_3)} \geq p_{ij}^{(n_1)} \, p_{jk}^{(n_3)} > 0$

γραψαμε οτι $p_{ij}^{(n+m)} = \sum_k p_{ik}^{(n)} \, p_{kj}^{(m)}$

$= \sum_l p_{il}^{(n_1)} \, p_{lk}^{(n_3)}$

$p_{ki}^{(n_4+n_2)} \geq p_{kj}^{(n_4)} \cdot p_{ji}^{(n_2)} > 0$

$= \sum_l p_{kl}^{(n_4)} \, p_{li}^{(n_2)}$

Συνεπως η σχεση επικοινωνιας ειναι μια σχεση ισοδυναμιας

Παρατηρηση

Οι καταστασεις που επικοινωνουν μεταξυ τους φτιαχνουν μια κλαση (ομαδα) ισοδυναμιας επικοινωνουντων καταστασεων

Ορισμος

Αν μια Μ.Α εχει ολες τις καταστασεις της να ανηκουν σε μια και μονο κλαση ισοδυναμιας επικοινωνουντων καταστασεων τοτε ονομαζεται μη διαχωρισιμη

Π.χ Ασκ. 14

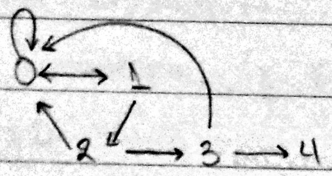
Δινεται ο πινακας μεταβασης

$$
P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc}
1/2 & 1/2 & 0 & 0 & \\
2/3 & 0 & 1/3 & 0 & \\
3/4 & 0 & 0 & 1/4 & \\
4/5 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \\
 & & & & \\
\end{array}\right]
\end{array}
$$

το $0 \to 2$ γιατι υπαρχει διαδρομη $0 \to 1 \to 2$

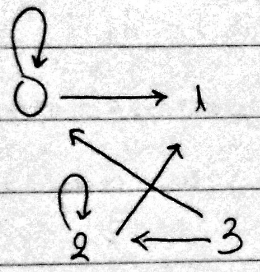
$$p_{k0} = \frac{k+1}{k+2}, \quad k = 0,1,2,\dots$$

$$p_{k\,k+1} = \frac{1}{k+2}, \quad k = 0,1,2,\dots$$




Επικοινωνουν μεταξυ τους αρα μη διαχωρισιμη Μ.Α παραδειγμα 2

$$P = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 3 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{array}$$




0 → 2 δεν υπαρχει δρομος

2 → 0 μπορω 2 → 1 → 0

2 και 0 δεν επικοινωνουν

Δεν επικοινωνουν μεταξυ τους ειτε και αν ειχα μονο 0 και 1

Δεν ειναι μη διαχωρισιμη, ειναι διαχωρισιμη

Για να αποφασισω ποιες καταστασεις επικοινωνουν και ποιες οχι απο τα προηγουμενα παραδειγματα αλλα και απο πληθωρα αλλων παραδειγματων προκυπτει οτι μπορω να το κανω κοιτωντας μονο το πινακα μεταβασεων

Ορισμοι Επαναληψιμοτητας

Σε οσα ακολουθουν θα συμβολιζουμε

$F_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_r \neq j \ \forall r < n \mid X_0 = i)$ = P(η πιθαν. να παω απο το i στο j στο i-οστο βημα για 1η φορα) πχ

$F_{12}^{(3)} = P(1 \to 2$ σε 3 βηματα για 1η φορα)

$P_{12}^{(3)} = P(1 \to 2$ σε 3 βηματα)

$F_{ij}^{*} = \sum_{n=1}^{+\infty} F_{ij}^{(n)} = P($να φτασω οποιαδηποτε στιγμη στο j ξεκινωντας απο το i)

$F_{ii}^{*} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{ii}^{(n)}$

συνεχεια πχ 14

$f_{00}^{(1)} = 1/2$

$f_{00}^{(2)} = P(0 \to 1 \to 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$

$f_{00}^{(3)} = P(0 \to 1 \to 2 \to 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$

Αρα $f_{00}^{(n)} = \frac{n}{(n+1)!}$

$P_{00}^{(2)} = P\left(0 \begin{array}{l} \to 0 \to 0 \\ \to 1 \to 0 \end{array}\right) = P(0 \to 0 \to 0) + P(0 \to 1 \to 0)$

$P_{00}^{(3)} = P\left(0 \begin{array}{l} \to 0 \begin{array}{l} \to 0 \to 0 \\ \to 1 \to 0 \end{array} \\ \to 1 \begin{array}{l} \to 0 \to 0 \\ \to 2 \to 0 \end{array} \end{array}\right)$ ειναι δυσκολο να το βρω ετσι μπορω να βρω ομως τον $P^3$ απο τις αποδειξεις

Ορισμοί

1) $i \in S$ επαναληπτική αν και μόνο αν $f_{ii}^{*} = 1$

2) Μια κατάσταση λέγεται παροδική $f_{ii}^{*} < 1$

Συμβολίζουμε με $\mu_i$ τον αναμενόμενο αριθμό βημάτων επιστροφής πρώτης φοράς στο $i$

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{+\infty} n f_{ii}^{(n)}$$

θα γυρισω μετα απο αναμενομενο αριθμο απειρο

3) Μια επαναληπτική κατάσταση λέγεται αφανώς επαναληπτική αν και μόνο αν $f_{ii}^{*} = 1$ και $\mu_i = +\infty$

4) Μια κατάσταση λέγεται θετικώς επαναληπτική αν και μόνο αν είναι επαναληπτική $f_{ii}^{*} = 1$ και $\mu_i$ πεπερασμένο $< +\infty$

5) Μια κατάσταση (i) λέγεται απορροφητική αν.ν $p_{ii}^{(1)} = 1$
(δηλ αν η κίνηση σταματάει εκεί)

6) Περίοδος μιας κατάστασης (i) λέγεται ο ΜΚΔ όλων των ακεραίων $n \geq 1$ για τους οποίους $p_{ii}^{(n)} > 0$

7) Μια κατάσταση λέμε ότι είναι απεριοδική αν η περίοδος της είναι ίση με το 1, διαφορετικά είναι περιοδική

8)

Συνέχεια (14)

$$f_{00}^{(n)} = \frac{n}{(n+1)!}$$

$$\sum \left( \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) = 1$$

$$\sum n \left( \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) = e-1$$

$f_{00}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$ επαναλ.

$\mu_i = \sum n f_{00}^{(n)} = e-1 < +\infty$ άρα θετικά επαναλ.

η 0 θετικά επαναλ.

Επειδή το 1 ανήκει στην ίδια κλάση με το 0 τότε έχει όμοιες καταστάσεις άρα θα είναι και αυτή θετικά επαναλ.

$P_{00}^{(1)} > 0$

$P_{01}^{(2)} = \frac{1}{2} > 0$

Περίοδος $d_0 = 1$

$P_{11}^{(1)} = 0$

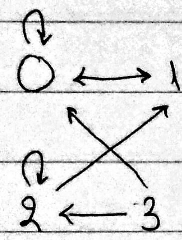
$P_{11}^{(2)} = P\left(1 \begin{smallmatrix} \nearrow 0 \to 1 \\ \searrow 2 \to 1 \end{smallmatrix}\right) > 0$

$P_{11}^{(3)} = P\left(1 \begin{smallmatrix} \nearrow 0 \to 0 \to 1 \\ \searrow \ldots \end{smallmatrix}\right) > 0$

Περίοδος $d_1 = 1$ δε χρειάζεται να το υπολογίσω γιατί βρίσκεται στην ίδια κλάση με το 0

Συνεχεια

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\
P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$




Αρα διαχωρισιμη

$f_{33}^{(1)} = 0$

$f_{33}^{(2)} = P(3 \begin{smallmatrix} \to 0 \not\to 3 \\ \to 2 \not\to 3 \end{smallmatrix}) = 0$

Αρα $f_{33}^{(n)} = 0$ και $f_{33}^{*} < 1$ συνεπως παροδικη

$f_{22}^{(1)} = 2/3$

$f_{22}^{(2)} = P(2 \to 1 \not\to 2) = 0$

$f_{22}^{(3)} = 0$

Αρα $f_{22}^{(n)} = 0$ για $n \geq 2$

$f_{00}^{(1)} = 1/2$

$f_{00}^{(2)} = P(0 \to 1 \to 0) = 1/2 \cdot 1$

$f_{00}^{(3)} = P(\cancel{0 \to} 1 \to \ ) = 0$

$f_{00}^{(n)} = 0$, $n \geq 3$

Αρα $f_{00}^{*} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ και ετσι επαναληπτικη

$\mu_0 = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ αρα θετικως επαναλ.

$d_0 = 1$ (αφου κανει αναπηδηση ΜΚΔ(1, ο,τι θελει) = 1)

$f_{11}^{(1)} = 0$

$f_{11}^{(2)} = P(1 \to 0 \to 1) = 1/2$

$f_{11}^{(3)} = P(1 \to 0 \to 0 \to 1) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4 = 1/2^2$

$f_{11}^{(4)} = P(1 \to 0 \to 0 \to 0 \to 1) = 1/2^3 = 1/8$

Αρα γενικος τυπος

$$f_{11}^{(n)} = \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{για } n \geq 2$$

γεωμ. προοδος

$$f_{11}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}^{(n)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

αρα επαναληπτικη

$$\mu_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} n f_{11}^{(n)} = \sum_{n=2}^{+\infty} n \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$$

θυμαμαι

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = (1-x)^{-1} \Rightarrow \sum n x^{n-1} = (1-x)^{-2}$$

Αρα $$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(1-\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$$

οποτε εχω τωρα $$\mu_1 = \sum_{n=2}^{+\infty} n \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = 4 - \frac{1}{2^0} = 4-1 = 3$$

Επειδη ξεκιναει απο 2 και εγω ξερω απο n=1 τοτε αφαιρω για n=1

Ο αριθμος επαν, μη διαχ

Ασκησεις : 15 ιδια με 14),